Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

Proposition de correction détaillée

En-tête

- **Session :** 2024
- **Groupement :** B
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)
- **Spécialités concernées :** Aéronautique, ATI, Bâtiment, Carrosseries, Systèmes automatiques, Enveloppe des bâtiments, Environnement nucléaire, Fluides-énergies-domotique, Traitement des matériaux, Travaux publics

---

EXERCICE 1 (10 points)

On étudie la résistance du béton en fonction du temps de séchage, modélisée par une équation différentielle, puis par une fonction exponentielle, et enfin à l'aide d'un algorithme.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

Énoncé résumé

- 1. Résoudre l'équation différentielle homogène $y' + 0{,}06y = 0$.
- 2. Vérifier que la fonction constante $g(t) = 35$ est solution de $y' + 0{,}06y = 2{,}1$.
- 3. Déduire l'ensemble des solutions de $y' + 0{,}06y = 2{,}1$.
- 4. En déduire l'expression de f sachant que $f(0) = 0$.

Correction détaillée

1. Résolution de l'équation homogène $y' + 0{,}06y = 0$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

> *$y' + ay = 0$ admet pour solution générale $y(t) = k e^{-a t}$*

Ici, $a = 0{,}06$, donc :

$y(t) = k e^{-0{,}06 t}$ où k est une constante réelle.

Solution générale : $y(t) = k e^{-0{,}06 t}$

Point de méthode : On utilise la solution-type de l'équation différentielle linéaire homogène.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant.

2. Vérification que $g(t) = 35$ est solution de $y' + 0{,}06y = 2{,}1$

Calculons $g'(t)$:
$g'(t) = 0$ (car constante)
Donc $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$

Vérification : $g(t) = 35$ est bien solution de l'équation différentielle.

Point de méthode : Pour vérifier, il suffit de remplacer dans l'équation.
Erreur fréquente : Oublier de calculer la dérivée de la constante (qui est toujours 0).

3. Ensemble des solutions de y' + 0,06y = 2,1

L'ensemble des solutions de l'équation complète est :
$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$
où y_p est une solution particulière (ici 35), et y_h la solution générale de l'homogène.
$y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$

Ensemble des solutions : $y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$ (k réel)

Point de méthode : Solution générale = solution particulière + solution homogène.
Erreur fréquente : Oublier la constante d'intégration k.

4. Détermination de f sachant f(0) = 0

On cherche k tel que $f(0) = 0$:
$f(0) = k e^{0} + 35 = k + 35 = 0$
D'où $k = -35$
Donc $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Expression de f : $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante.
Erreur fréquente : Ne pas appliquer la condition initiale ou mal résoudre l'équation pour k.

Partie B. Étude de la fonction f

Énoncé résumé

- 1. Calculer f(7) et f(3) (72 h = 3 jours), arrondir au dixième.
- 2. Vérifier que $f'(t) = 2,1 e^{-0,06 t}$.
- 3. Déterminer le signe de f'(t) et le sens de variation de f.
- 4. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et interpréter.
- 5. Vérifier si f(28) correspond à 80% de la résistance finale.
- 6. Montrer que $F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$ est une primitive de f.
- 7. Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 28], arrondie au dixième.

Correction détaillée

1. Calcul de la résistance après 7 jours et 72 heures

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

- Pour t = 7 :
  $f(7) = -35 e^{-0,06 \times 7} + 35$
  $0,06 \times 7 = 0,42$

$e^{-0,42} \approx 0,657$
$-35 \times 0,657 \approx -22,0$
$-22,0 + 35 = 13,0$
Donc $f(7) \approx 13,0$ MPa

- Pour $t = 3$ (72 h = 3 jours) :
$f(3) = -35\, e^{-0,18} + 35$
$e^{-0,18} \approx 0,836$
$-35 \times 0,836 \approx -29,3$
$-29,3 + 35 = 5,7$
Donc $f(3) \approx 5,7$ MPa

Résistances :
Après 7 jours : 13,0 MPa
Après 72 h : 5,7 MPa

Point de méthode : Bien convertir les heures en jours et arrondir au dixième.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif devant le 35.

2. Vérification de la dérivée $f'(t) = 2,1\, e^{-0,06 t}$

$f(t) = -35\, e^{-0,06 t} + 35$
$f'(t) = -35 \times (-0,06)\, e^{-0,06 t} + 0 = 2,1\, e^{-0,06 t}$

Vérification : $f'(t) = 2,1\, e^{-0,06 t}$

Point de méthode : Dérivée de $e^{u(t)}$: multiplier par la dérivée de l'exposant.
Erreur fréquente : Oublier le signe ou la dérivée de l'exposant.

3. Signe de $f'(t)$ et sens de variation de f

$e^{-0,06 t} > 0$ pour tout t, donc $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Signe : $f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$
Sens de variation : f est strictement croissante.

Point de méthode : Un exposant négatif donne toujours une valeur positive.
Erreur fréquente : Croire que la fonction est décroissante à cause du signe négatif devant le 35.

4. Limite de f à l'infini et interprétation

$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-0,06 t} = 0$
Donc $f(t) \to -35 \times 0 + 35 = 35$ MPa

Interprétation : La résistance du béton tend vers 35 MPa au bout d'un temps très long (résistance finale).

Limite : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 35$ MPa

Point de méthode : Limite d'une exponentielle négative : tend vers 0.
Erreur fréquente : Penser que la résistance continue de croître au-delà de 35.

5. Vérification de l'affirmation du fabricant ($f(28) = 80\%$ de la résistance finale ?)

Calculons $f(28)$:
$f(28) = -35 e^{-0,06 \times 28} + 35$
$0,06 \times 28 = 1,68$
$e^{-1,68} \approx 0,186$
$-35 \times 0,186 \approx -6,5$
$-6,5 + 35 = 28,5$ MPa (arrondi au dixième)
La résistance finale est 35 MPa.
80% de 35 = $0,8 \times 35 = 28,0$ MPa
$f(28) \approx 28,5$ MPa, donc $f(28) \approx 81,4\%$ de la résistance finale.

Affirmation : FAUX, car $f(28) \approx 81,4\%$ de 35, soit 28,5 MPa.

Point de méthode : Toujours comparer la valeur calculée à l'affirmation.
Erreur fréquente : Ne pas arrondir correctement ou ne pas comparer au bon pourcentage.

6. Montrer que $F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$ est une primitive de f

Calculons $F'(t)$:
$F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$
$F'(t) = \frac{1750}{3} \times (-0,06) e^{-0,06 t} + 35$
$-0,06 \times \frac{1750}{3} = -35$
$F'(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 = f(t)$

Oui, F est bien une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dériver terme à terme, attention au signe lors de la dérivation de l'exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier par la dérivée de l'exposant.

7. Valeur moyenne de f sur $[0 ; 28]$

Formule de la valeur moyenne :
$M = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\, dt$
Ici, $a = 0$, $b = 28$
On utilise la primitive F :
$M = \frac{1}{28} [F(28) - F(0)]$

- $F(28) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28$
  $e^{-1,68} \approx 0,186$
  $\frac{1750}{3} \times 0,186 \approx 108,3$
  $35 \times 28 = 980$
  $F(28) \approx 108,3 + 980 = 1088,3$
- $F(0) = \frac{1750}{3} \times 1 + 0 = 583,3$
- $F(28) - F(0) = 1088,3 - 583,3 = 505,0$
- $M = \frac{505,0}{28} \approx 18,0$ MPa (arrondi au dixième)

Valeur moyenne : 18,0 MPa

Point de méthode : Utiliser la primitive et bien calculer la différence.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par la longueur de l'intervalle.

Partie C. Algorithme

Énoncé résumé

- 1. Compléter l'algorithme pour trouver le nombre minimal de jours N tel que $f(N) \geq 21$.
- 2. Donner la valeur de N et expliquer la démarche.

Correction détaillée

1. Compléter l'algorithme

- Ligne 3 : Tant que $R < 21$
- Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Algorithme complété :

- Ligne 1 : $t \leftarrow 0$
- Ligne 2 : $R \leftarrow 0$
- Ligne 3 : Tant que $R < 21$
- Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$
- Ligne 5 : $R \leftarrow -35 e^{-0,06 t} + 35$
- Ligne 6 : Fin Tant que

Point de méthode : On incrémente t jusqu'à ce que R atteigne 21.
Erreur fréquente : Inverser la condition ou oublier d'incrémenter t.

2. Valeur de N (nombre minimal de jours)

On cherche t tel que $-35 e^{-0,06 t} + 35 \geq 21$
$-35 e^{-0,06 t} \geq -14$
$e^{-0,06 t} \leq 0,4$
$-0,06 t \leq \ln(0,4)$
$t \geq -\frac{\ln(0,4)}{0,06}$
$\ln(0,4) \approx -0,916$
$-\ln(0,4) \approx 0,916$
$t \geq 0,916 / 0,06 \approx 15,27$
Comme on cherche le nombre entier minimal, $N = 16$

Valeur de N : 16 jours

Point de méthode : Résoudre l'inéquation en prenant le logarithme.
Erreur fréquente : Arrondir à l'entier inférieur au lieu du supérieur.

EXERCICE 2 (10 points)

Probabilités et statistiques : loi normale, loi binomiale, test d'hypothèse.

Partie A. Loi normale

Énoncé résumé

- 1. Calculer $P(31 \leq X \leq 33)$ où $X \sim N(32, 0{,}6)$.
- 2. Déterminer h tel que $P(X > 32 - h) = 0{,}975$.

Correction détaillée

1. Calcul de $P(31 \leq X \leq 33)$

Standardisons :
$Z = \frac{X - 32}{0{,}6}$
$P(31 \leq X \leq 33) = P\left(\frac{31 - 32}{0{,}6} \leq Z \leq \frac{33 - 32}{0{,}6}\right) = P(-1{,}67 \leq Z \leq 1{,}67)$
D'après la table de la loi normale centrée réduite :
$P(-1{,}67 \leq Z \leq 1{,}67) = P(Z \leq 1{,}67) - P(Z \leq -1{,}67)$
$P(Z \leq 1{,}67) \approx 0{,}9525$
$P(Z \leq -1{,}67) \approx 0{,}0475$
$0{,}9525 - 0{,}0475 = 0{,}905$

Probabilité : 0,905 (arrondi au millième)

Point de méthode : Standardiser et utiliser la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire les deux probabilités.

2. Détermination de h tel que $P(X > 32 - h) = 0{,}975$

$P(X > 32 - h) = 0{,}975$ donc $P(X \leq 32 - h) = 0{,}025$
Standardisons :
$P\left(Z \leq \frac{32 - h - 32}{0{,}6}\right) = 0{,}025$
$P(Z \leq -\frac{h}{0{,}6}) = 0{,}025$
$-h/0{,}6 = z_{0{,}025} \approx -1{,}96$
$h/0{,}6 = 1{,}96$
$h = 1{,}176$
Arrondi au millième : $h = 1{,}176$

Valeur de h : 1,176

Point de méthode : Utiliser la table de la loi normale pour trouver le quantile.
Erreur fréquente : Confondre $P(X > a)$ et $P(X \leq a)$.

Partie B. Loi binomiale

Énoncé résumé

- 1. Donner la loi de Y, ses paramètres et son espérance.
- 2. Calculer la probabilité que exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne.
- 3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne.

Correction détaillée

1. Loi suivie par Y

Y : nombre d'imprimantes en panne parmi 15, chaque imprimante a une probabilité 0,07 d'être en panne.
$Y \sim \mathcal{B}(n = 15, p = 0{,}07)$
Espérance : $E(Y) = n \times p = 15 \times 0{,}07 = 1{,}05$

Loi : $Y \sim \mathcal{B}(15 ; 0{,}07)$
Espérance : 1,05

Point de méthode : Loi binomiale : nombre d'essais, probabilité de succès.
Erreur fréquente : Confondre le nombre d'imprimantes et le nombre de pannes.

2. Probabilité que exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne

12 imprimantes ne tombent pas en panne = 3 imprimantes tombent en panne.
$P(Y = 3) = C_{15}^{3} \times 0{,}07^3 \times 0{,}93^{12}$
$C_{15}^{3} = 455$
$0{,}07^3 \approx 0{,}000343$
$0{,}93^{12} \approx 0{,}477$
$P(Y = 3) \approx 455 \times 0{,}000343 \times 0{,}477 \approx 0{,}074$

Probabilité : 0,074 (arrondi au millième)

Point de méthode : Utiliser la formule de la loi binomiale.
Erreur fréquente : Calculer la probabilité pour 12 pannes au lieu de 3.

3. Probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)]$
Calculons :

- $P(Y = 0) = 0{,}93^{15} \approx 0{,}349$
- $P(Y = 1) = 15 \times 0{,}07 \times 0{,}93^{14} \approx 15 \times 0{,}07 \times 0{,}375 \approx 0{,}394$
- $P(Y = 2) = C_{15}^{2} \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^{13} = 105 \times 0{,}0049 \times 0{,}403 \approx 0{,}207$

$P(Y \leq 2) \approx 0{,}349 + 0{,}394 + 0{,}207 = 0{,}950$
$P(Y \geq 3) = 1 - 0{,}950 = 0{,}050$

Probabilité : 0,050 (arrondi au millième)

Point de méthode : Additionner les probabilités pour 0, 1 et 2 pannes, puis soustraire de 1.
Erreur fréquente : Oublier d'additionner toutes les valeurs jusqu'à 2.

Partie C. Test d’hypothèse

Énoncé résumé

- 1. Justifier que $\overline{Z}$ suit $N(50, 0{,}04)$ sous H_0.
- 2. Déterminer h tel que $P(50 - h \leq \overline{Z} \leq 50 + h) = 0{,}95$ (QCM).
- 3. Énoncer la règle de décision du test.
- 4. Appliquer le test à l’échantillon donné et conclure.

Correction détaillée

1. Justification de la loi de $\overline{Z}$

Z suit $N(\mu, \sigma = 0{,}35)$, donc la moyenne d’un échantillon de taille n = 80 :
$\overline{Z} \sim N(\mu, \frac{0{,}35}{\sqrt{80}})$
$\frac{0{,}35}{\sqrt{80}} \approx 0{,}035 / 8{,}944 \approx 0{,}04$
Sous H_0, $\mu = 50$, donc $\overline{Z} \sim N(50, 0{,}04)$

Sous H_0, $\overline{Z} \sim N(50, 0{,}04)$

Point de méthode : L’écart-type de la moyenne est $\sigma / \sqrt{n}$.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la racine carrée de n.

2. QCM : valeur de h telle que $P(50 - h \leq \overline{Z} \leq 50 + h) = 0{,}95$

Pour un intervalle de confiance à 95% avec la loi normale, $h = 1{,}96 \times 0{,}04 \approx 0{,}08$

Réponse exacte : 0,08

Point de méthode : Utiliser la table de la loi normale : $1{,}96 \times \sigma$ pour 95%.
Erreur fréquente : Prendre 2 × 0,04 ou 0,04 tout court.

3. Règle de décision du test

Règle : On rejette H_0 si la moyenne observée $\overline{z}$ de l’échantillon n’appartient pas à l’intervalle [50 - 0,08 ; 50 + 0,08] soit [49,92 ; 50,08].

Règle : Rejeter H_0 si $\overline{z} \notin [49{,}92 ; 50{,}08]$

Point de méthode : Utiliser l’intervalle de confiance centré sur la valeur théorique.
Erreur fréquente : Oublier que le test est bilatéral.

4. Application du test à l’échantillon

Calculons la moyenne observée :

- Effectifs : 2 × 49,7 + 5 × 49,8 + 15 × 49,9 + 24 × 50 + 17 × 50,2 + 13 × 50,4 + 4 × 50,5
- Total des blocs : 2 + 5 + 15 + 24 + 17 + 13 + 4 = 80
- S = 2 × 49,7 = 99,4
  5 × 49,8 = 249,0

$15 \times 49{,}9 = 748{,}5$
$24 \times 50 = 1200{,}0$
$17 \times 50{,}2 = 853{,}4$
$13 \times 50{,}4 = 655{,}2$
$4 \times 50{,}5 = 202{,}0$
$S = 99{,}4 + 249{,}0 + 748{,}5 + 1200{,}0 + 853{,}4 + 655{,}2 + 202{,}0 = 4007{,}5$

- $\overline{z} = 4007{,}5 / 80 = 50{,}09$

$50{,}09 \notin [49{,}92 ; 50{,}08]$, donc on rejette H_0 au seuil de 5%.

Conclusion : On rejette l'hypothèse H_0 : la résistance moyenne n'est pas 50 MPa.

Point de méthode : Calculer la moyenne pondérée.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par le total des effectifs.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \implies y(t) = k e^{-a t}$
- $\int e^{a t} dt = \frac{1}{a} e^{a t} + C$
- $\frac{d}{dt} [e^{a t}] = a e^{a t}$
- Valeur moyenne sur $[a ; b]$: $M = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt$
- Loi normale centrée réduite : $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
- Loi binomiale : $P(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance binomiale : $E(Y) = n p$
- Intervalle de confiance à 95% : $[\mu - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement chaque question** : repérez les données, les unités et ce qui est demandé.
- **Soignez la rédaction** : justifiez chaque étape, explicitez vos calculs et vos raisonnements.
- **Vérifiez vos résultats** : un résultat aberrant ou non réaliste doit vous alerter.
- **Utilisez la calculatrice à bon escient** : pour les arrondis, les probabilités, mais ne négligez pas la méthode.
- **Ne laissez aucune question sans réponse** : même une démarche partielle peut rapporter des points.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.