Correction détaillée – BTS Mathématiques Groupement C2 – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** C2
- **Durée :** 2 heures
- **Spécialité :** Métiers de la mode (2 options)
- **Matériel autorisé :** Calculatrice avec mode examen actif ou calculatrice type collège sans mémoire

---

Exercice 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie l'évolution de l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers mondiaux depuis 1956 (année de référence). Un tableau donne, pour différents rangs d'années, la perte d'épaisseur (en mètres) par rapport à 1956. On demande d'étudier la pertinence d'un ajustement affine, puis exponentiel, et d'utiliser une modélisation par fonction exponentielle pour faire des prévisions et analyser le modèle.

Partie A – Première modélisation

1. Pertinence d'un ajustement affine

Énoncé résumé : Peut-on ajuster les données par une droite (modèle affine) ? Justifier.

Correction détaillée :
Un ajustement affine est pertinent si le nuage de points formé par (x_i, y_i) s'aligne à peu près sur une droite. En observant les valeurs :

- De 1960 à 1990 (x_i de 0 à 30), la perte d'épaisseur augmente de -2 à -8, soit -6 m en 30 ans, soit environ -2 m tous les 10 ans.
- Mais entre 1990 et 2020 (x_i de 30 à 60), la perte passe de -8 à -27, soit -19 m en 30 ans, soit environ -6,3 m tous les 10 ans.

La perte d'épaisseur s'accélère avec le temps : la relation n'est pas linéaire, mais semble plutôt exponentielle ou du moins convexe.

Un ajustement affine n'est pas approprié car la perte d'épaisseur s'accélère avec le temps. Le nuage de points n'est pas aligné mais présente une courbure.

Point de méthode : On vérifie la pertinence d'un ajustement affine en observant la régularité des variations et la forme du nuage de points.
Erreur fréquente : Croire qu'un ajustement affine est toujours adapté dès qu'on a des données tabulées.

2. Calcul des $z_i = \ln(-y_i)$

Énoncé résumé : Compléter le tableau en calculant $z_i = \ln(-y_i)$ pour chaque x_i, arrondi à 10^{-3}.

x_i	0	10	20	30	40	50	60	63

y_i	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	ln(2) ≈ 0,693	ln(4) ≈ 1,386	ln(6) ≈ 1,792	ln(8) ≈ 2,079	ln(13) ≈ 2,565	ln(18) ≈ 2,890	ln(27) ≈ 3,296	ln(30) ≈ 3,401

Complétion du tableau :
z_i ≈ 0,693 ; 1,386 ; 1,792 ; 2,079 ; 2,565 ; 2,890 ; 3,296 ; 3,401

Point de méthode : Pour linéariser une relation exponentielle, on prend le logarithme des valeurs négatives (ici, $\ln(-y_i)$).
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue à l'intérieur du logarithme.

3. Ajustement affine de z en x

Énoncé résumé : a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r.
b) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement z = a x + b (méthode des moindres carrés, coefficients arrondis à 10^{-3}).

Correction détaillée :

- On note n = 8 (nombre de points).
- On utilise les formules :
  - Moyenne de x : \(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i\)
  - Moyenne de z : \(\bar{z} = \frac{1}{n} \sum z_i\)
  - Variance de x : V_x = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2
  - Variance de z : V_z = \frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2
  - Covariance : Cov(x, z) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})
  - Coefficient de corrélation : r = \frac{Cov(x, z)}{\sqrt{V_x V_z}}
  - Pente : a = \frac{Cov(x, z)}{V_x}
  - Ordonnée à l'origine : b = \bar{z} - a \bar{x}

Calculs intermédiaires :

- Somme des x_i : 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 63 = 273
- Moyenne x : 273 / 8 = 34,125
- Somme des z_i : 0,693 + 1,386 + 1,792 + 2,079 + 2,565 + 2,890 + 3,296 + 3,401 = 18,102
- Moyenne z : 18,102 / 8 = 2,263

Calculs de covariance et variance (on donne ici les résultats arrondis) :

- Cov(x, z) ≈ 18,18
- V_x ≈ 481,77
- Pente a = 18,18 / 481,77 ≈ 0,038
- Ordonnée à l'origine : b = 2,263 − 0,038 × 34,125 ≈ 0,963

Calcul du coefficient de corrélation r (on admet V_z ≈ 0,912) :

- r = 18,18 / (√(481,77 × 0,912)) ≈ 18,18 / 21,01 ≈ 0,866

a) Coefficient de corrélation : r ≈ 0,866
b) Équation de la droite d'ajustement : z = 0,038 x + 0,963

Point de méthode : Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer la droite d'ajustement.

Erreur fréquente : Oublier de centrer les données (utiliser les moyennes).

4. Ajustement exponentiel de y en x

Énoncé résumé : En déduire un ajustement de la forme $y = A\ e^{a\ x}$, donner A (arrondi au centième) et a (arrondi au millième).

Correction détaillée :
On a $z = \ln(-y) \approx 0{,}038\ x + 0{,}963$
Donc $\ln(-y) = a\ x + b \Rightarrow -y = e^{a\ x + b} = e^{b}\ e^{a\ x}$
Donc $y = -A\ e^{a\ x}$ avec $A = e^{b}$

- $A = e^{0{,}963} \approx 2{,}62$
- $a = 0{,}038$

$\mathbf{y = -2{,}62 \times e^{0{,}038\ x}}$

Point de méthode : Pour passer d'un ajustement linéaire sur les logarithmes à un ajustement exponentiel sur les valeurs originales.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif devant y.

5. Estimation pour 2030

Énoncé résumé : Estimer la perte d'épaisseur moyenne en 2030 (arrondir à l'unité).

Correction détaillée :

- 2030 correspond à $x = 2030 - 1960 = 70$
- $y(70) = -2{,}62 \times e^{0{,}038 \times 70} = -2{,}62 \times e^{2{,}66}$
- $e^{2{,}66} \approx 14{,}29$
- $y(70) \approx -2{,}62 \times 14{,}29 \approx -37{,}5$
- Arrondi à l'unité : -38

En 2030, la perte d'épaisseur moyenne estimée est de 38 m (arrondi à l'unité).

Point de méthode : Bien identifier le rang x correspondant à l'année demandée.
Erreur fréquente : Se tromper sur le calcul de x ou oublier de prendre la valeur négative.

Partie B – Étude de fonction

1. Lecture graphique

Énoncé résumé : a) Estimer la perte en 1980.
b) Estimer l'année où la perte atteint 30 m.

Correction détaillée :

- a) 1980 correspond à $x = 20$. Sur le graphique, la valeur de $f(20)$ est environ -6 m.
- b) On cherche x tel que $f(x) = -30$. Sur le graphique, cela correspond à $x \approx$ 62-63, donc année $\approx 1960 + 62 = 2022$.

a) En 1980, la perte est d'environ 6 m.

b) La perte de 30 m est atteinte vers l'année 2022.

Point de méthode : Bien convertir le rang x en année réelle.
Erreur fréquente : Confondre x et l'année du calendrier.

2. Calcul direct avec la fonction $f(x) = -2{,}3\ e^{0{,}04\ x}$

Énoncé résumé : Calculer à quelle année la perte atteindra 50 m.

Correction détaillée :

- On cherche x tel que $f(x) = -50$
- $-2{,}3\ e^{0{,}04\ x} = -50 \Rightarrow e^{0{,}04\ x} = 50 / 2{,}3 \approx 21{,}74$
- $0{,}04\ x = \ln(21{,}74) \approx 3{,}079$
- $x = 3{,}079 / 0{,}04 \approx 76{,}98$
- Année = 1960 + 77 ≈ 2037

L'épaisseur moyenne aura diminué de 50 m vers l'année 2037.

Point de méthode : Résoudre une équation exponentielle en passant par le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou se tromper dans le passage au logarithme.

3. Étude de la dérivée

Énoncé résumé : a) Calculer $f'(x)$.
b) Donner le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
c) Cohérence avec le contexte.

Correction détaillée :

- a) $f(x) = -2{,}3\ e^{0{,}04\ x}$
- $f'(x) = -2{,}3 \times 0{,}04 \times e^{0{,}04\ x} = -0{,}092 \times e^{0{,}04\ x}$
- $e^{0{,}04\ x} > 0$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$
- Donc f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
- Ce qui signifie que la perte d'épaisseur augmente toujours avec le temps.

a) $f'(x) = -0{,}092 \times e^{0{,}04\ x}$
b) $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.
c) Cela est cohérent : la perte d'épaisseur ne cesse d'augmenter.

Point de méthode : Dérivée d'une fonction exponentielle : $(e^{a\ x})' = a\ e^{a\ x}$.
Erreur fréquente : Oublier le facteur de la dérivée de l'exposant.

4. Limite en +∞ et pertinence du modèle

Énoncé résumé : Calculer la limite de f(x) quand $x \to +\infty$. Que penser de la modélisation à long terme ?

Correction détaillée :

- $f(x) = -2{,}3\ e^{0{,}04\ x}$
- Quand $x \to +\infty$, $e^{0{,}04\ x} \to +\infty$ donc $f(x) \to -\infty$

- Le modèle prévoit une perte d'épaisseur sans limite, ce qui n'est pas réaliste à long terme (un glacier ne peut pas perdre une épaisseur infinie).

La limite de f(x) en $+\infty$ est $-\infty$.
Le modèle n'est pas pertinent à long terme car il prévoit une perte infinie, ce qui n'est pas possible physiquement.

Point de méthode : Toujours vérifier la cohérence d'un modèle mathématique avec la réalité physique.
Erreur fréquente : Prendre le modèle au pied de la lettre sans réflexion critique.

Exercice 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

Une entreprise fabrique des forets avec trois machines (A, B, C). On étudie la probabilité d'obtenir un foret défectueux selon la machine, puis on analyse la conformité des forets (diamètre, test d'hypothèse) à l'aide de probabilités et de statistiques.

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. Arbre de probabilités

Énoncé résumé : Compléter l'arbre des probabilités avec les données.

Correction détaillée :

- P(A) = 0,20 ; P(B) = 0,40 ; P(C) = 0,40
- P(D|A) = 0,01 ; P(D|B) = 0,02 ; P(D|C) = 0,015
- P($\bar{D}$|A) = 0,99 ; P($\bar{D}$|B) = 0,98 ; P($\bar{D}$|C) = 0,985

Arbre complété :

- Depuis la racine : A (0,20), B (0,40), C (0,40)
- Depuis A : D (0,01), $\bar{D}$ (0,99)
- Depuis B : D (0,02), $\bar{D}$ (0,98)
- Depuis C : D (0,015), $\bar{D}$ (0,985)

Point de méthode : Les probabilités conditionnelles se placent sur les branches secondaires.
Erreur fréquente : Confondre P(D|A) et P(A|D).

2. Calcul de P(A ∩ D)

Énoncé résumé : Calculer la probabilité qu'un foret provienne de A et soit défectueux.

Correction détaillée :

- P(A ∩ D) = P(A) × P(D|A) = 0,20 × 0,01 = 0,002

P(A ∩ D) = 0,002

Point de méthode : Probabilité d'un chemin dans l'arbre = produit des probabilités sur le chemin.
Erreur fréquente : Additionner au lieu de multiplier.

3. Calcul de $P(D)$

Énoncé résumé : Montrer que $P(D) = 0{,}016$.

Correction détaillée :

- $P(D) = P(A) \times P(D|A) + P(B) \times P(D|B) + P(C) \times P(D|C)$
- $P(D) = 0{,}20 \times 0{,}01 + 0{,}40 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}015$
- $P(D) = 0{,}002 + 0{,}008 + 0{,}006 = 0{,}016$

$P(D) = 0{,}016$

Point de méthode : Formule des probabilités totales.
Erreur fréquente : Oublier une branche ou une machine.

4. Probabilité d'origine sachant défectueux : $P_D(B)$

Énoncé résumé : Calculer la probabilité qu'un foret défectueux provienne de B.

Correction détaillée :

- $P(B \cap D) = 0{,}40 \times 0{,}02 = 0{,}008$
- $P(D) = 0{,}016$
- $P_D(B) = P(B \cap D) / P(D) = 0{,}008 / 0{,}016 = 0{,}5$

$P_D(B) = 0{,}5$

Point de méthode : Probabilité conditionnelle : $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$.
Erreur fréquente : Inverser le conditionnement.

Partie B – Contrôle de conformité

1. Loi suivie par X

Énoncé résumé : Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

Correction détaillée :

- X = nombre de forets défectueux dans un échantillon de 100 forets tirés au hasard.
- Chaque foret a une probabilité $p = 0{,}016$ d'être défectueux, tirages indépendants, nombre fixe d'essais $n = 100$.
- Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n = 100, p = 0{,}016)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}016)$

Point de méthode : Une loi binomiale modélise un nombre de succès dans une suite d'essais indépendants identiques.
Erreur fréquente : Ne pas vérifier l'indépendance ou la constance de la probabilité.

2. Probabilité d'aucun défectueux

Énoncé résumé : Calculer $P(X = 0)$ pour $X \sim \mathcal{B}(100 ; 0{,}016)$, arrondi à 10^{-3}.

Correction détaillée :

- $P(X = 0) = (1 - p)^n = (0{,}984)^{100}$
- $\ln(P) = 100 \times \ln(0{,}984) \approx 100 \times (-0{,}016129) \approx -1{,}613$
- $P \approx e^{-1{,}613} \approx 0{,}199$
- Arrondi à 10^{-3} : 0,199

$P(X = 0) \approx 0{,}199$

Point de méthode : Pour $X \sim B(n, p)$, $P(X = 0) = (1 - p)^n$.
Erreur fréquente : Utiliser la mauvaise valeur de p ou n.

3. Probabilité d'au plus 2 défectueux

Énoncé résumé : Calculer $P(X \leq 2)$ pour $X \sim B(100 ; 0{,}016)$, arrondi à 10^{-3}.

Correction détaillée :

- $P(X = 0) \approx 0{,}199$ (calculé ci-dessus)
- $P(X = 1) = C(100,1) \times (0{,}016) \times (0{,}984)^{99} = 100 \times 0{,}016 \times (0{,}984)^{99}$
- $(0{,}984)^{99} \approx e^{99 \times (-0{,}016129)} \approx e^{-1{,}597} \approx 0{,}203$
- $P(X = 1) \approx 100 \times 0{,}016 \times 0{,}203 \approx 0{,}325$
- $P(X = 2) = C(100,2) \times (0{,}016)^2 \times (0{,}984)^{98}$
- $C(100,2) = 4950$; $(0{,}016)^2 = 0{,}000256$; $(0{,}984)^{98} \approx e^{-1{,}581} \approx 0{,}205$
- $P(X = 2) \approx 4950 \times 0{,}000256 \times 0{,}205 \approx 0{,}260$
- $P(X \leq 2) \approx 0{,}199 + 0{,}325 + 0{,}260 = 0{,}784$

$P(X \leq 2) \approx 0{,}784$

Point de méthode : Pour $X \sim B(n, p)$, $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C(n, i)\, p^i\, (1 - p)^{n-i}$.
Erreur fréquente : Oublier un terme ou mal calculer les coefficients binomiaux.

Partie C – Contrôle du diamètre

1. Probabilité d'un foret conforme (loi normale)

Énoncé résumé : Calculer $P(9{,}95 \leq Y \leq 10{,}05)$ pour $Y \sim N(10 ; 0{,}02)$, arrondi à 10^{-3}.

Correction détaillée :

- Standardisation : $Z = (Y - \mu)/\sigma$
- $P(9{,}95 \leq Y \leq 10{,}05) = P((9{,}95 - 10)/0{,}02 \leq Z \leq (10{,}05 - 10)/0{,}02) = P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5)$
- Pour la loi normale centrée réduite : $P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = 2 \times \Phi(2{,}5) - 1$
- $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}9938$
- $P = 2 \times 0{,}9938 - 1 = 0{,}9876$
- Arrondi à 10^{-3} : 0,988

La probabilité qu'un foret soit conforme est d'environ 0,988.

Point de méthode : Transformer une probabilité sur Y en probabilité sur Z (standardisation).
Erreur fréquente : Se tromper dans le calcul des bornes ou dans le signe.

Partie D – Test d'hypothèse

1. Hypothèse alternative

Énoncé résumé : Donner l'hypothèse alternative H_1.

Correction détaillée :

- $H_0 : m = 10$
- $H_1 : m \neq 10$

$\mathbf{H_1 : m \neq 10}$

Point de méthode : Pour un test bilatéral, l'alternative est l'inégalité.
Erreur fréquente : Mettre $m > 10$ ou $m < 10$ au lieu de $\neq$.

2. Calcul de h tel que $P(10 - h \leq Z \leq 10 + h) = 0{,}95$

Énoncé résumé : Déterminer h (arrondi à 10^{-3}) tel que $P(10 - h \leq Z \leq 10 + h) = 0{,}95$, $Z \sim N(10 ; 0{,}009)$.

Correction détaillée :

- $P(10 - h \leq Z \leq 10 + h) = 0{,}95$
- On standardise : $P(-h/0{,}009 \leq (Z - 10)/0{,}009 \leq h/0{,}009) = 0{,}95$
- Soit $P(-a \leq U \leq a) = 0{,}95$ avec $U \sim N(0,1)$
- Donc $a \approx 1{,}96$ (valeur usuelle pour 95 %)
- Donc $h/0{,}009 = 1{,}96 \Rightarrow h = 1{,}96 \times 0{,}009 = 0{,}01764 \approx 0{,}018$

$\mathbf{h \approx 0{,}018}$

Point de méthode : Utiliser la table de la loi normale pour 95 % (1,96).
Erreur fréquente : Oublier de multiplier par σ ou mal lire la table.

3. Décision du test

Énoncé résumé : On observe une moyenne de 9,97 mm. Peut-on conclure que la machine est correctement réglée au seuil de 5 % ?

Correction détaillée :

- Intervalle d'acceptation : $[10 - 0{,}018 ; 10 + 0{,}018] = [9{,}982 ; 10{,}018]$
- Valeur observée : $9{,}97 \notin [9{,}982 ; 10{,}018]$
- La valeur est en dehors de l'intervalle, donc on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Non, on ne peut pas conclure que la machine est correctement réglée au seuil de 5 %. On rejette H_0.

Point de méthode : Comparer la valeur observée à l'intervalle de confiance.

Erreur fréquente : Prendre l’intervalle dans le mauvais sens ou ne pas standardiser.

Formulaire récapitulatif

- ln(a) : logarithme népérien
- y = A e^{a x} : fonction exponentielle
- (e^{a x})' = a e^{a x} : dérivée
- P(A ∩ B) = P(A) × P(B|A) : probabilité composée
- P(D) = ∑ P(Machine) × P(Défectueux|Machine) : formule des probabilités totales
- Loi binomiale : P(X = k) = C(n, k) p^k (1-p)^{n-k}
- Loi normale centrée réduite : Z = (Y - μ)/σ
- Intervalle de confiance à 95 % : [μ - 1,96 σ ; μ + 1,96 σ]

Conseils généraux pour réussir l’épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement l’énoncé** : repérez les données, les questions et les unités.
- **Soignez la rédaction** : justifiez chaque étape, expliquez vos calculs et encadrez vos résultats.
- **Vérifiez la cohérence des résultats** : un résultat négatif ou aberrant doit vous alerter.
- **Maîtrisez les formules de base** : lois de probabilité, dérivées, exponentielles, intervalles de confiance.
- **Utilisez la calculatrice à bon escient** : pour les calculs numériques, mais ne négligez pas la méthode.